



香 港 樹 仁 大 學

從統計學的角度看香港六合彩之賽局安排

潘志昌

二〇一一年九月

經濟及金融學系

Working Paper Series

Department of Economics and Finance

Hong Kong Shue Yan University

Working Paper Series
September 2011

All Rights Reserved
ISBN: 978-988-18444-9-1
Copyright © 2011 by Hong Kong Shue Yan University

Information on the Working Paper Series can be found on the last page. Please address any comments and further inquiries to:

Dr. Shu-kam Lee
Working Paper Coordinator
Department of Economics and Finance
Hong Kong Shue Yan University
10 Wai Tsui Crescent
Braemar Hill Road
North Point
Hong Kong
Fax: 2806-8044
Tel: 2806-5121 (Mr. Jeffery Chan)
Email: sklee@hksyu.edu

從統計學的角度看香港六合彩之賽局安排

潘志昌

1 導言

執教統計學不覺之間已經超過 30 個年頭，在教與學的生涯中體驗良多：六十後¹的學生下課後對我說希望能在課餘再教他們多些統計工具，七十後的學生下課後對我說請給他們額外的習題，八十後的學生下課後對我說上完你的課之後非常疲累，九十後的學生下課後間中有幾位同學請我再解釋一次課堂上的一些內容。筆者認為，由於電腦統計軟件愈來愈普及，學生愈來愈覺得在課堂上學習統計方法是浪費時間，他們根本沒有動機去學習一些基本統計方法，結果很多學生愈來愈失去運用統計學去分析現象和人類行為的能力。寫作本文的動機就是希望讓同學們知道，懂得運用統計學去分析一些社會行為，是可以發掘出很多論點和帶出很多有意思的討論。因此，筆者選釋一個香港市民非常普遍的行為——買「六合彩」，作為例子來說明統計學的用處。

「香港獎券管理局」是管理六合彩開彩的法定機構，而經辦開彩則由香港賽馬會的附屬公司「香港馬會獎券有限公司」負責。關於六合彩，相信大家在閒談中，往往會討論或爭拗一些問題，例如：六合彩各獎項中獎的機率是怎樣算出來的？六合彩各獎項中獎號碼可以準確預測嗎？六合彩頭獎有沒有造假的可能？為什麼馬會曾經多次增加六合彩攪珠號碼和調高每注單式彩票的投注金額呢？增加六合彩攪珠號碼和調高每注單式彩票派彩金額有什麼 同的效果？以及六合彩是一項公平的賭博嗎？

為了去論證以上各項問題的答案，筆者除了參考了《香港賭博條例》、《政府獎券條例》、香港馬會獎券有限公司的《獎券規例》、過去大眾傳播媒體對六合彩的報導、互聯網、及有關賭博理論的學術性文章以外，還從香港馬會公布之過去攪珠結果²抄錄了由 2002 年 7 月 4 日開始採用 49 個攪珠號碼 (攪珠期數第 02/053) 到 2011 年 6 月 30 日 (攪珠期數第 11/077) 共 1311 期六合彩資料，這些資料內容包括攪珠期數、攪珠日期、金多寶名稱、總投注額、7 個攪珠結果、頭獎至七獎每注獎金和中獎注數等共 31,464 個數值輸入點。至於數據分析方法，主要

¹ 六十後 (七十後、八十後、九十後)是指在 1960s (1970s、1980s、1990s) 出生的人士。

² 參見香港馬會六合彩網網頁：<http://bet.hkjc.com/marksix/default.aspx>

是採用敘述統計 (Descriptive Statistics)、次數分配 (Frequency Distribution)、超幾何分配 (Hyper-geometric Distribution)、適合度檢定 (Goodness-of-Fit Test)、自相關 (Auto-correlation)、以及一些基礎機率觀念；相信這些數據分析方法對一位曾經修讀過基礎統計學的同學，應該不會是陌生的。

2 六合彩的演變及投注資料

彩票的普遍發行在世界上已有 200 多年的歷史，現時很多經營彩票業務的國家都把發展彩票作為扶持福利和體育事業的一項資金來源。彩票在亞洲的發展到 20 世紀 30 年才開始：國民政府於 30 年代開始發行彩票以籌集發展航空、公路建設及賑災等的經費；泰國早於 1936 年成立政府彩票辦公室；日本在 1945 年成立住友銀行彩票部，開始了現代彩票的發行；而韓國、馬來西亞和新加坡等國家的彩票是從 60 年代末期才開始發展起來的；澳門白鴿票則於 1912 年開始面世³。在香港，政府為打擊字花⁴，在 1975 年起開辦六合彩獎券，把民間的非法活動加以規範，得到的收益則撥作慈善用途。

香港政府從 1975 年起開售「多重彩」彩票，取代原先的「馬票」⁵。負責開彩的是香港獎券管理局，由香港賽馬會以「香港馬會獎券有限公司」的名義代理接受投注。投注彩池除用作派彩外，餘額撥交香港社會福利署獎券基金用作慈善用途。最初的彩票是 14 選 6，每週攪珠開彩。為迎合大眾博彩的心理，1976 年大幅增加中彩難度及派彩金額，改變開彩方法為 36 選

³ 澳門白鴿票在 1950 年代至 60 年代曾盛行，1965 年 4 月 3 日起至今由榮興彩票有限公司經營。彩票以《千字文》開首 80 字，投注者在彩票上選十個字，每次攪珠抽出 20 個贏彩字。1990 年 12 月起從人手攪珠形式改由電腦系統控制開彩。該彩票由澳門旅遊娛樂有限公司轄下的榮興白鴿票公司專營，每年繳付專利稅五十二萬元。由於中獎獎金不高，現正逐漸被淘汰。

⁴ 字花亦稱花會，是中國民間流行的一種賭博方法。開賭的方法大致如下：莊家會預先開出一個列表，內有三十六個人名或三十六種物品。每次開賭時，抽出其中一個，把寫上名字的紙或竹牌，覆蓋起來，放在當眼的地方，讓賭徒下注。過一段時間以後，打開謎底然後派彩。派彩一般為「一賠三十」左右。開字花作弊的情況並不罕見，例如莊家看見買中的投注太多，可以藉詞取消開彩，甚至挾款一走了之。普羅大眾因沉迷賭博字花，亦造成不少社會問題。

⁵ 馬票(粵語讀音「馬標」)，是香港早年舉辦的一種結合賽馬與攪珠的彩票形式，於 1931 年首次由香港賽馬會發行。馬票可分為大馬票與小搖彩兩種，先以攪珠方式產生入圍號碼，再以一場指定賽事的賽果決定頭、二、三獎中彩馬票。大馬票頭獎彩金由早期的數十萬港元，至後期超過 100 萬港元 (當時一般市民的工資是 HK\$200 到 HK\$300)；因而，每次開彩時，全城哄動，人人爭發橫財夢。小搖彩則於馬季期間每月開獎一次，彩金由早期約 1 萬港元，至後期約接近 10 萬港元。當年馬票售價每張二元，街販出售，每張賺取一毫附加費。馬會開始舉辦六合彩以後，大馬票在 1977 年起取消。

6 (及一個特別號碼)，正式名為「六合彩 (Mark Six)」，並將開彩次數增加為每星期 2 次 (最近更增加至每星期 3 次)。為杜絕「大包圍」投注方式⁶以及令其彩金繼續具有吸引力⁷，在過去35年來它的攪珠號碼加了5次 (由最初的36個加至現在的49個)，投注金額亦由每注HK\$2加了3次 (由最初的2元加至現在的10元)。另外，為增加頭獎的吸引力，於1982年開始加入「金多寶」彩池，其後並於1985年農曆新年、端午節及中秋節增設「金多寶」，1995年復活節及聖誕節增設「金多寶」，2001年暑期增設「金多寶」，2005年開始於每個未有舉辦節日「金多寶」的月份的其中一個星期二舉辦「金多寶」。表2.1列出了六合彩每注投注方式、每注金額、以及頭獎保證彩池的演變情況：

表 2.1 六合彩的演變

日期	每注投注方式	每注金額	頭獎獎金基金的最低限額
1976年7月13日	1-36 個數字選 6 個	HK\$2	尚未設立
1983年8月16日	1-40 個數字選 6 個	HK\$2	尚未設立
1988年10月6日	1-42 個數字選 6 個	HK\$2	尚未設立
1990年1月30日	1-45 個數字選 6 個	HK\$2	尚未設立
1991年9月13日	1-45 個數字選 6 個	HK\$4	尚未設立
1995年6月13日	1-45 個數字選 6 個	HK\$5	HK\$5,000,000
1996年6月11日	1-47 個數字選 6 個	HK\$5	HK\$5,000,000
2002年7月4日	1-49 個數字選 6 個	HK\$5	HK\$5,000,000
2010年11月9日	1-49 個數字選 6 個	HK\$10	HK\$8,000,000

六合彩屬於樂透式 (Lotto Ticket) 彩票，投注者在若干個可選擇的數字號碼中只考慮數字的組合而不考慮順序來進行投注的一種彩票遊戲玩法。由於其方法簡單，便於掌握，深受市民喜愛，是目前世界上電腦彩票的一種主流玩法。樂透型彩票的獎金高低取決於投注額的多少，投注額越多，獎金越多。六合彩開彩時以自動機械攪珠，從設定數字彩球中抽出六個中獎號碼及一個特別號碼，過程由電視直播。

六合彩投注方法分單式、複式、以及胆拖三種：每注單式投注，從設定數字中選出 6 個數字；複式投注是選出超過 6 個數字，中獎機會及投注金額是全部可能的 6 個數字組合，這組合的數目就是單式彩票中獎機會及投注金額的倍數；胆拖投注是選出超過 6 個數字，其中一個或

⁶ 馬會在1992年曾設定頭獎派彩上限為3千8百萬元，但於2002年7月4日開始49個號碼後，就取消了這個上限。

⁷ 例如在 1995 年的 5 百萬可以買到 2 個市區住宅單位，但在 2010 年只僅能買到 1 個市區住宅單位。

以上作為「胆」。中獎機會及投注金額需要從所選數字中計算出全部可能的6個數字組合，但每個組合中必須包括作「胆」的數字。可見，單式投注是計算中獎金額的基礎，因此本文只討論單式投注。

六合彩獎券總投注額是根據以下兩項原則分配⁸。第一項佔總投注額的46%，它包括獎券博彩稅25%屬政府稅收、獎券基金15%撥交社會福利署獎券基金用作慈善用途、及馬會佣金6%用作經營開支。第二項獎金基金佔總投注額的54%，在計算其他獎項的獎金金額之前，獎金基金將首先減去用以支付四獎(9,600元)、五獎(640元)、六獎(320元)及七獎(40元)等各項固定獎金的款額(9600元 × 中獎注數 + 640元 × 中獎注數 + 320元 × 中獎注數 + 40元 × 中獎注數)，再減去餘額撥入「金多寶彩池」的7%，剩餘的獎金基金則按表2.2的百分比撥入頭、二、三獎獎金基金，而頭獎彩池包括之前的累積彩池，在每年特定的「金多寶」開彩中，亦包括金多寶累積。表2.2和2.3分別紀錄了頭、二、三獎獎金分配的準則，以及過去8年(1311期)的極值紀錄。

表2.2 六合彩頭、二、三獎獎金分配

獎金基金名稱	獎金基金分配	每注最低派彩
頭獎	$45\% \times [\text{獎金基金減去第四、五、六及七組的總獎金及金多寶扣數}] \div \text{中獎注數}$	HK\$76,800
二獎	$15\% \times [\text{獎金基金減去第四、五、六及七組的總獎金及金多寶扣數}] \div \text{中獎注數}$	HK\$38,400
三獎	$40\% \times [\text{獎金基金減去第四、五、六及七組的總獎金及金多寶扣數}] \div \text{中獎注數}$	HK\$19,200

表 2.3 1311 期六合彩⁹的觀察極值

項目	內容	攪珠日期
最少總投注額	HK\$19,761,689	2005年6月18日
最多總投注額	HK\$342,962,710	2011年5月20日
最高頭獎每注獎金	HK\$70,962,580	2003年9月12日
最多頭獎中獎注數	11注	2003年7月15日
最多連續沒有頭獎中獎期數	8期	2011年4月28日至5月17日
最高二獎每注獎金	HK\$4,337,425	2010年3月30日
最多二獎中獎注數	241注	2002年12月31日

⁸ 2010年11月9日生效。

⁹ 自2002年7月4日至2011年6月30日六合彩共開獎1311期。

最高三獎每注獎金	HK\$175,420	2011 年 6 月 23 日
最多三獎中獎注數	241 注	2002 年 12 月 31 日

3 六合彩攪珠結果是否能夠預測

六合彩每期攪珠結果是按時序和按中獎號碼大小紀錄的時間數列，所以各期的 6 個中獎號碼和 1 個特別號碼可以看成 7 組不同的時間數列；所謂六合彩預測，是指在其它客觀環境沒有改變的假設下，根據每組數列過去的號碼出現狀況來推斷下一期將會出現號碼的行為。因每期公布的是 6 個由小至大排序的中獎號碼和 1 個沒有加入排序特別號碼，假如我們把攪珠期數由 02/053 至 11/077 (共 1311 期)的第一個號碼先放在一組數列上，後面接上攪珠期數由 02/053 至 11/077(共 1311 期)第二個號碼的數列；如此類推，把這 7 個號碼的數列 (每個數列有 1311 個觀察值) 接連而成為一組共有 $1311 \times 7 = 9177$ 個觀察值的數列；為方便看出這個數列的特徵，筆者繪製了該數列的散佈圖。觀察圖 3.1，我們發現從 2002 年 7 月 4 日到 2011 年 6 月 30 日(第 7867 到第 9177 個觀察值) 共 1311 個特別號碼是平均散佈在 1- 49 個攪珠號碼之間，表示每期攪出之特別號碼是隨機出現；毫無疑問特別號碼是不能預測。但是，從第 1 到第 7866 個觀察值表現出一個明顯向上趨升的模式，這 6 個中獎號碼看似不像是隨機出現。

關於這 6 個中獎號碼的散佈區間，我們可以從表 3.1 觀察出一些特徵：最細的第一個中獎號碼很少有機會超過 35，第二個中獎號碼很少機會低於 2 和超過 41，第三個中獎號碼很少機會低於 3 和超過 43，第四個中獎號碼很少機會低於 5 和超過 46，第五個中獎號碼很少機會低於 8 和超過 48，第六個中獎號碼很少機會低於 15。由此可見，雖然這六個中獎號碼不是在 49 個攪珠號碼中隨機出現，但卻是在它們出現的區間範圍內¹⁰隨機出現，因為區間範圍內有不少於 34 個號碼，所以這六個中獎號碼亦是不能預測。為更科學地證明各期六合彩的 6 個中獎號碼和 1 個特別號碼是隨機出現，我們可以採用適合度檢定和自相關兩種統計方法作為論證的工具。

¹⁰ 準確來說應該是圖 3.1 中點數最密集的區間範圍。

圖 3.1 1311 期的 6 個中獎號碼和 1 個特別號碼共 9177 個觀察值之擴散圖

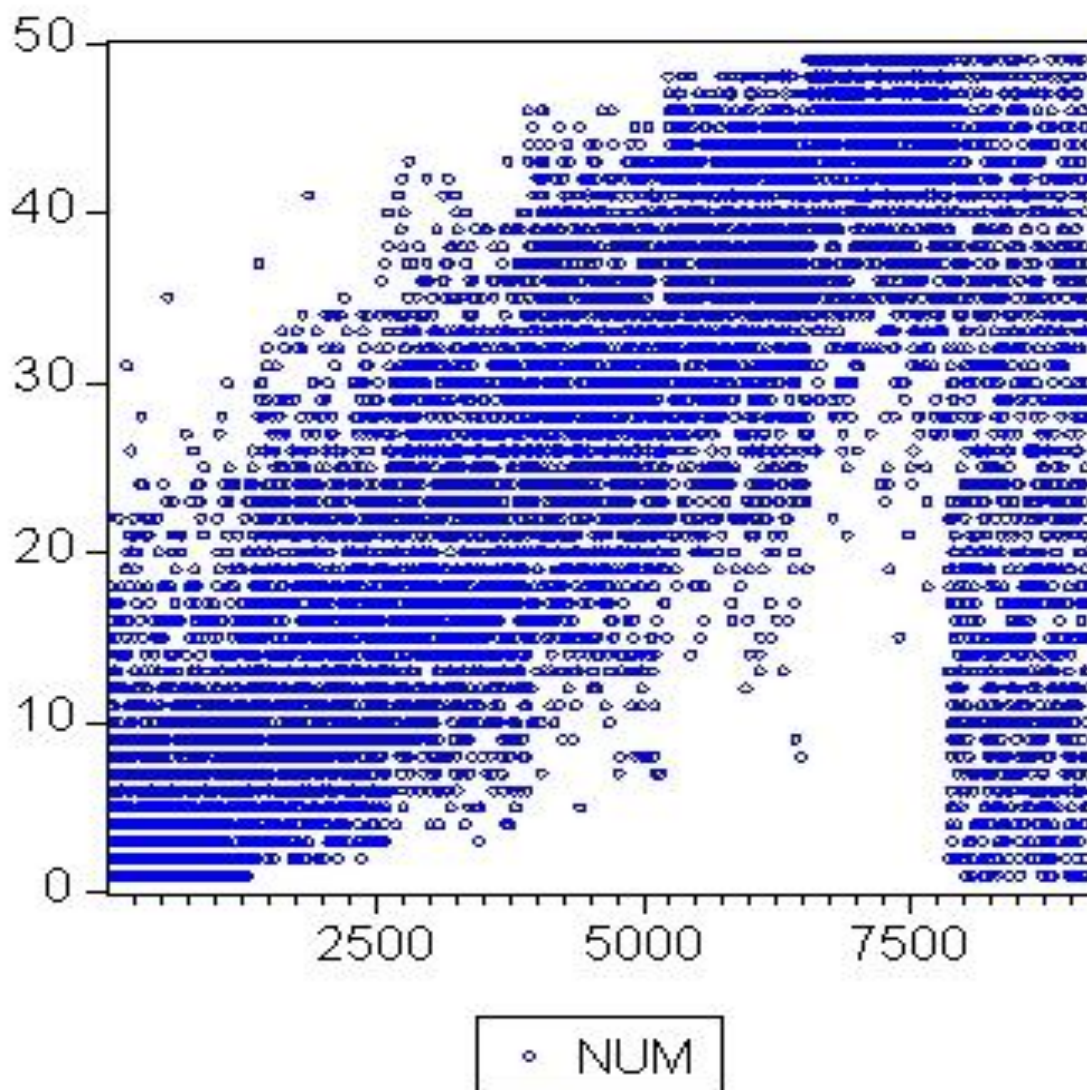


表 3.1 1311 期六合彩攪珠結果的敘述統計量

敘述統計量	六個中獎號碼						特別號碼
	1	2	3	4	5	6	
平均數	7.01	14.07	21.17	28.54	35.57	42.82	24.67
標準誤	0.15	0.20	0.23	0.23	0.21	0.16	0.39
中間值	6	13	21	29	37	44	24
眾數	1	9	18	30	39	49	10
標準差	5.56	7.41	8.18	8.15	7.43	5.81	14.20
變異數	30.95	54.91	66.86	66.48	55.22	33.71	201.51
峰度	1.75	-0.20	-0.57	-0.54	-0.08	1.33	-1.26

偏態	1.30	0.60	0.22	-0.16	-0.60	-1.20	0.04
範圍	34	39	40	41	40	34	48
最小值	1	2	3	5	8	15	1
最大值	35	41	43	46	48	49	49
個數	1311	1311	1311	1311	1311	1311	1311

檢查一組資料滿足某種分配的問題稱為適合度檢定(Goodness of fit test)¹¹，最常用的檢定方法是卡方 χ^2 檢定，此分類資料常以次數分配表的方式呈現資料， χ^2 的計算值由下面公式求得：

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

其中， f_o 是待檢定數列的觀察次數

f_e 是待檢定數列可能會服從之理論分配的期望次數

如果 χ^2 的計算值小於以待檢定數列的樣本數目減 1 為自由度 (即 $df = n-1$) 和顯著水平 α 的 $\chi^2_{df,\alpha}$ 檢定臨界值時，我們沒有證據說此觀察數列並不是服從某種理論分配。

現在我們是要驗證 1311 期六合彩的攪珠中獎號碼的次數分配，是否與這 49 個攪珠中獎號碼在 9177 次攪珠 (1311 期，每期 7 個中獎號碼) 中隨機出現的理論次數分配互相吻合。在表 3.2 中， f_o 是 1 至 49 個攪珠號碼的觀察中獎次數， f_e 是 1 至 49 個攪珠號碼服從隨機分配的中獎期望次數，因為是隨機分配，所以每個攪珠號碼中獎的次數都是一樣，即 $9177 \div 49 = 187.2857$ 。根據計算公式得出 χ^2 的計算值為 44.6056，其對應的臨界機率值 (P-value) 為 0.6127¹²，可見顯著水平 α 要非常高 ($\alpha > 0.6127$) 或信賴水平非常低才可否定觀察次數與期望次數 互相吻合；即是說，沒有證據顯示 1311 期六合彩攪珠中獎號碼的次數分配並不是服從隨機分配，所以我們多了一個六合攪珠結果並 能預測的佐證。

¹¹ 參見 Newbold (1995), pp 405-410.

¹² 在 Excel 中，用 “=CHIDIST(44.6056,48)” 指令可求得 0.6127，

表 3.2 1311 期六合彩中獎號碼¹³次數以配表及 χ^2 值的計算

中獎號碼	觀察次數 (f_o)	期望次數 (f_e)	$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$
1	193	187.2857	0.1743
2	184	187.2857	0.0576
3	171	187.2857	1.4161
4	194	187.2857	0.2407
5	196	187.2857	0.4055
	203	187.2857	1.3185
7	195	187.2857	0.3178
8	184	187.2857	0.0576
9	215	187.2857	4.1011
10	216	187.2857	4.4024
11	177	187.2857	0.5649
12	183	187.2857	0.0981
13	199	187.2857	0.7327
14	196	187.2857	0.4055
15	181	187.2857	0.2110
16	177	187.2857	0.5649
17	185	187.2857	0.0279
18	186	187.2857	0.0088
19	173	187.2857	1.0897
20	181	187.2857	0.2110
21	186	187.2857	0.0088
22	216	187.2857	4.4024
23	177	187.2857	0.5649
24	200	187.2857	0.8631
25	162	187.2857	3.4139

中獎號碼	觀察次數 (f_o)	期望次數 (f_e)	$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$
26	183	187.2857	0.0981
27	174	187.2857	0.9425
28	179	187.2857	0.3666
29	180	187.2857	0.2834
30	198	187.2857	0.6129
31	191	187.2857	0.0737
32	176	187.2857	0.6801
33	187	187.2857	0.0004
34	167	187.2857	2.1972
35	196	187.2857	0.4055
36	189	187.2857	0.0157
37	185	187.2857	0.0279
38	198	187.2857	0.6129
39	187	187.2857	0.0004
40	198	187.2857	0.6129
41	191	187.2857	0.0737
42	200	187.2857	0.8631
43	187	187.2857	0.0004
44	161	187.2857	3.6892
45	186	187.2857	0.0088
46	167	187.2857	2.1972
47	164	187.2857	2.8952
48	198	187.2857	0.6129
49	205	187.2857	1.6755
合計	9177	9176.9993	44.6056

另外，我們亦可以採用自相關 (Autocorrelation)來證明六合彩攪珠結果是不能預測。所謂自相關，是指一個時間數列 ($Y_T, Y_{T-1}, Y_{T-2}, \dots, Y_3, Y_2, Y_1$) 跟相隔 k 期自己的數列 ($Y_{T-k}, Y_{T-k-1}, Y_{T-k-2}, \dots, Y_3, Y_2, Y_1$) 計算出的相關係數¹⁴。 $-1 \leq r \leq 1$ ； $|r|$ 愈接近 1，表示原數列與相隔 k 期的同一數列有很高的相關度； $|r|$ 愈接近 0，表示原數列與相隔 k 期的同一數列只有很低的相關度。

¹³ 包括特別號碼，即每期中有七個獎號碼

¹⁴ 因兩個數列的觀察值要相等才能夠計算其相關係數，所以 $n = T - k$ 。例如計算 2011 年 6 月 30 日 1311 期的第一個中獎號碼跟相隔 5 期 2011 年 6 月 21 日 1306 期的第一個中獎號碼的相關係數， $n = 1311 - 5 = 1306$ 。

表 3.3 各中獎號碼的自相關係數 (r)

相隔期數	中獎號碼						
	第一個	第二個	第三個	第四個	第五個	第六個	特別號碼
1	0.021	0.041	0.014	0.007	0.018	-0.026	-0.021
2	-0.004	0.016	-0.009	0.005	-0.003	0.007	-0.013
3	0.018	0.048	0.012	-0.030	-0.028	-0.010	-0.004
4	0.020	0.087	0.019	0.017	0.002	-0.000	-0.020
5	0.022	-0.009	0.014	0.039	0.042	0.043	0.014
6	-0.002	0.007	-0.023	-0.005	0.055	0.039	0.019
7	-0.009	-0.040	-0.044	-0.030	0.012	0.010	0.011
8	0.017	-0.004	-0.001	-0.018	-0.004	0.006	0.008
9	-0.039	-0.039	-0.050	-0.017	-0.023	0.044	-0.017
10	0.039	-0.009	-0.024	0.040	0.015	0.007	-0.005

根據樣本自相關係數的顯著性檢定的方法，得知在約 1311 個觀察值 (1311 減相隔期數) 的樣本算出的自相關係數小於 0.0667 時，我們可以推測該中獎號碼的母群體自相關係數為零¹⁵。在表 3.3 中的 70 個自相關係數中，有 69 個的絕對值是小於 0.0667 (自相關係數絕對值的平均數是 $|r| = 0.02$)，雖然有一個自相關係數 $r = 0.087$ ，但其相關度是非常之低。所以，每期攪珠 7 個中獎號碼與過去的攪珠結果並沒有關係；即是說，每期六合彩各中獎號碼都是隨機出現，它們是沒有固定的走勢模式，所以沒有預測性。

4 六合彩 49 個攪珠號碼抽各獎項的中獎機率

攪出頭獎的中獎機率是最簡單，首先採用獨立事項的聯合機率公式算出的數值 (即是： $(1/49) \times (1/48) \times (1/47) \times (1/46) \times (1/45) \times (1/44) = 9.932116447 \times 10^{-11}$)，然後將該數值除以一系列 6 個空格所有不同排序的可能組合數目 (即是： $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$)，便可以算出答案是 $1/13,983,816$ (即 $1/_{49}C_6$)；這種計算方法，簡單到最近連那位四十後才女林燕妮也有興致在報章

¹⁵ 參見 Newbold (1995), “Test for zero population correction”, 頁 433-434。自由度 $df = 1304$ (即是 1311-平均相隔期數-2)，顯著水平 $\alpha = 0.01$ 時，t-值為 2.5796，其相對應相關係數 $r = 0.0667$ 。即是說，如果樣本 $r > 0.0667$ ，有 99% 肯定母群體相關係數不為零。計算方法，參見 Newbold (1995), “Test for zero population correction”, 頁 433-434。

上用這個算式撰文談論¹⁶。可是，要算出其它獎項的中獎機率就會稍為複雜：除了特別號碼是最後攪出的號碼，它的單次事項出現的機率是 1/43 以外，我們不能肯定中獎彩票包含的每一個中獎號碼之單次事項出現機率¹⁷，因此我們只有採用加入條件機率概念的超幾何分配來解決這個問題¹⁸。

一個含有 N 個觀察值的有限母群體中，分為兩類觀察值：一類是被定義為成功者有 S 個觀察值，另一類是被定義為 成功者有 N-S 個觀察值。今在 N 個觀察值中採不再投返方式(sampling without replacement) 隨機抽取一個含 n 個觀察值樣本，則在該樣本中觀察值中含有性質 S 者為 X 個及不含性質 S 者為 n-X 個之機率分配稱為超幾何分配 (Hyper-geometric Distribution)¹⁹。六合彩各獎項的中獎機率分配就是屬超幾何分配，其計算公式如下：

$$P(X / S; N; n) = \frac{\begin{bmatrix} S \\ X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N - S \\ n - X \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}}$$

其中：

$P(X/S; N; n)$ = n 次試驗中 X 次成功的機率 (中獎機率)

N = 母體大小 (攪珠箱內所有號碼球的數目)

S = 母體中成功的個數 (中獎號碼的數目：不含特別號碼 S=6；含特別號碼 S=7)

N-S = 母體中 成功的個數 (攪珠箱內所有號碼球的數目減去中獎號碼的數目)

n = 樣本大小 (一注可選 6 個號碼，所以 n = 6)

¹⁶ 參見 2011 年 8 月 28 日明報，#009 副刊時代。

¹⁷ 例如二獎，除了特別號碼外的五個公布中獎號碼中，我們不知道它們分別被攪出的次序，所以不能肯定這五個公布中獎號碼中有沒有 1/49 (或 1/48、1/47、1/46、1/45、或 1/44)。所以，嚴格來說，在同一期中二獎的兩注單式投注，其中獎機會有可能不相同。

¹⁸ 計算相同現象出現的機率的方法有很多種，但正確答案只得一個。

¹⁹ 參見 Newbold (1995), pp 163-166

X = 樣本中成功的個數 (一注中獎號碼的數目)

$n-X$ = 樣本中不成功的個數

$$\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix} = {}_N C_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

因頭獎、三獎、五獎、以及七獎含 6 個中獎號碼，不含特別號碼，所以採用 $P(X/S=6; N=49;n=6)$ 計算其中獎機率。但是，二獎、四獎、以及六獎因含 1 個特別號碼，我們不能直接採用 $P(X/S=6; N=49;n=6)$ 計算它們的中獎機率。例如二獎，因每注最多可中 6 個號碼，但不知是 6 個中獎號碼，或是 5 個中獎號碼加特別號碼；我們知道 7 個項目選取 6 個項目為一組共有 7 種可能組合 (即 ${}_7 C_6 = 7$)，其中只有 1 組合 6 個中獎號碼 (即是頭獎)，而其中 6 種組合 (即 ${}_6 C_5 = 6$) 必定含 5 個中獎號碼加 1 個特別號碼 (即是二獎)，所以要以 $({}_6 C_5 / {}_7 C_6) \times P(X=5/S=7; N=49; n=6)$ 計算其中獎機率。同理，四獎及六獎亦要分別用 $({}_6 C_4 / {}_7 C_5)$ 和 $({}_6 C_3 / {}_7 C_4)$ 乘以其超幾何機率。表 4.1 詳細列出各獎項的中獎機率及其計算方法。

表 4.1 六合彩 49 個攪珠號碼抽各獎項的中獎機率

獎項	中獎組合	計算公式	中獎機率
頭獎	6 個數字	$P(X = 6 / S = 6; N = 49; n = 6) = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}}$	$\frac{1}{13,983,816}$
二獎	5 個數字 + 特別號碼	$\frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}} \times P(X = 6 / S = 7; N = 49; n = 6) = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}} \times \frac{\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}}$	$\frac{1}{2,330,636}$
三獎	5 個數字	$P(X = 5 / S = 6; N = 49; n = 6) = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 49 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}}$	$\frac{1}{54,200.84}$
四獎	4 個數字 + 特別號碼		$\frac{1}{22,196.53}$

		$\frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}} \times P(X = 5 / S = 7; N = 49; n = 6) = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}} \times \frac{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}}$	
五獎	4 個數字	$P(X = 4 / S = 6; N = 49; n = 6) = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}}$	$\frac{1}{1,032.4}$
六獎	3 個數字 + 特別號碼	$\frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}} \times P(X = 4 / S = 7; N = 49; n = 6) = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}} \times \frac{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 42 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}}$	$\frac{1}{812.07}$
七獎	3 個數字	$P(X = 3 / S = 6; N = 49; n = 6) = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 49 \\ 6 \end{bmatrix}}$	$\frac{1}{56.7}$

觀察表 4.2，首先我們很清楚看到從 1976 年到現在六合彩的攪珠號碼由 36 個分五次增加到 49 個，每次增加攪珠號碼數目，都使到各獎項的中獎機率下降。如果我們計算的 36 個號碼增加到 49 個號碼，七個獎項依次的中獎機率下降 86.07%、86.07%、80.04%、79.83%、71.09%、70.46%、以及 57.66%，可見增加攪珠號碼數目，對頭獎和二獎最不利。當然，假如中獎機率下降但獎金相應提高，只要投注的贏局期望值沒有改變，賽局公平情況並沒有改變。上文已提及樂透型彩票的獎金高低取決於投注額的多少，投注額愈多，獎金愈多；大家可能會認為，由於攪珠號碼數目增加令中獎機率下降，投注總額一是會下降，獎金一定愈少，賽局便會變得更不吸引力；這只是營辦者不顧看到的一種賽局結果。另外一種是樂觀的看法：因為攪珠號碼數目增加會令中獎機率下降，所以金多寶累積必會愈滾愈多，再加上每月特定的「金多寶」彩池，把獎金比正常水平推高好幾倍，同時投注的贏局期貨幣望值亦會明顯上升，結果反而令投注更為踴躍。近一次最長連續 8 期頭獎無人中，出現在 2011 年 4 月 28 日至 2011 年 5 月 17 日(參見如表 2.4)，多寶累積達 HK\$85,618,703，總投注額由 HK\$33,995,839 增加到 HK\$342,962,710，即 2011 年 5 月 17 日的總投注額是 2011 年 4 月 28 日的 10 倍有餘，就是一個很好的例子。

表 4.2 六合彩六次 同攪珠號碼抽出各獎項的中獎機率

獎項	中獎機率					
	攪珠號碼 1-36	攪珠號碼 1-40	攪珠號碼 1-42	攪珠號碼 1-45	攪珠號碼 1-47	攪珠號碼 1-49
頭獎	1/1,947,792	1/3,838,380	1/5,245,786	1/8,145,060	1/10,737,573	1/13,983,816
二獎	1/324,632	1/639,730	1/874,297.67	1/1,357,510	1/1,789,595.5	1/2,330,636
三獎	1/10,821.07	1/18,815.59	1/24,286.05	1/34,807.95	1/43,648.67	1/54,200.84
四獎	1/4,477.68	1/7,754.30	1/9,991.97	1/14,289.58	1/17,895.96	1/22,196.53
五獎	1/298.51	1/456.14	1/555.11	1/732.80	1/872.97	1/1,032.4
六獎	1/239.88	1/363.48	1/440.82	1/579.31	1/688.31	1/812.07
七獎	1/23.99	1/32.07	1/36.74	1/44.56	1/50.36	1/56.7

5 六合彩投注是賭博嗎？

對賭博 (Gambling) 定義，在各個範疇的文獻中都可以找到，筆者很喜歡李治洪 (2000, 頁 11) 給賭博定義做出的總結：“賭博具有三方面的意義：一是必須出於自願，即在意識到可失去財物和希望獲利的情況下，仍將財物（賭注）用於某一事先不知結果的活動；二是該活動的結果必須全憑機會，不受人為因素的影響；三是在上一點中所隱含的更深一層的意義，即由於結果全憑機會，不受人為因素的影響，因此是公平的。綜合而言，賭博是自願、隨機和公平的行為。”香港政府把合法的在賭博稱為博彩，根據香港法律第 148 章《賭博條例》第二條，博彩 (gaming) 指進行任何博彩遊戲或參加任何博彩遊戲，以贏得金錢或其他財產，不論任何進行該博彩遊戲的人是否有輸掉任何金錢或其他財產的風險。

本文第 3 和第 4 節已論證了六合彩賽局贏輸結果是隨機和解釋了各獎項出現的機率怎樣計算。六合彩賽局的參與者，除了營辦者和投注者外，還有政府和獎券基金之受益人士；營辦者和投注者是賽局的博弈者，而政府和獎券基金之受益人士是賽局的界外受惠者。表 5.1 是根據《香港馬會獎券有限公司獎券規例》計算每年六合彩的總投注額按規定的比率分配給賽局各參與者的理論數值，如果這理論數值跟觀察數值互相吻合，則表示賽局對營辦者、投注

者、及賽局的界外受惠者都很公平。

表 5.1 2003 年至 2010 年六合彩投注總額的分配

年份	總投注額	獎券博彩稅 (25%)	獎券基金 (15%)	馬會佣金 (6%)	獎金基金 (54%)
2003	5,287,332,310	1,321,833,078	793,099,847	317,239,939	2,855,159,447
2004	6,345,933,668	1,586,483,417	951,890,050	380,756,020	3,426,804,181
2005	6,418,759,532	1,604,689,883	962,813,930	385,125,572	3,466,130,147
2006	6,379,315,075	1,594,828,769	956,897,261	382,758,905	3,444,830,141
2007	6,717,127,531	1,679,281,883	1,007,569,130	403,027,652	3,627,248,867
2008	6,247,696,134	1,561,924,034	937,154,420	374,861,768	3,373,755,912
2009	6,096,638,397	1,524,159,599	914,495,760	365,798,304	3,292,184,734
2010	6,329,232,472	1,582,308,118	949,384,871	379,753,948	3,417,785,535
合計	49,822,035,119	12,455,508,780	7,473,305,268	2,989,322,107	26,903,898,964

六合彩投注總額分配 25% 給獎券博彩稅，15% 給獎券基金，和 6% 給馬會佣金肯定是沒有問題，但由於每期派彩總額是或然性，我們只在長期才能夠看出獎金基金是否等於派彩總額。為此，我們用以下算式來計算出從 2002 年 7 月 4 日到 2011 年 6 月 30 日共 1311 期的派彩總額，再看看它們的加總是否接近同期間投注總額加總的 54%：

$$\begin{aligned} \text{派彩總額} = & (\text{頭獎每注獎金} \times \text{中獎注數}) + (\text{二獎每注獎金} \times \text{中獎注數}) + \\ & (\text{三獎每注獎金} \times \text{中獎注數}) + (\text{四獎每注獎金} \times \text{中獎注數}) + \\ & (\text{五獎每注獎金} \times \text{中獎注數}) + (\text{六獎每注獎金} \times \text{中獎注數}) + \\ & (\text{七獎每注獎金} \times \text{中獎注數}) \end{aligned}$$

結果，我們得出 1311 期的派彩總額的加總是 HK\$31,074,864,809，投注總額的加總是 HK\$56,451,095,322，即派彩總額佔投注總額 55.05%；因為這個比率是介於香港馬會獎券有限公司《獎券規例》規定的 54% 和香港法律第 334 章《政府獎券條例》規定的 60% 之間，所以我們可以說六合彩賽局中，營辦者與投注者的博弈是遵守遊戲規則的；但是，要證明投注者與投注者之間的博弈是否公平，就有些複雜。如果有投注者在某些賽局中能夠用大包圍的方式肯定獲利，這樣就對其它投注者不公平。

在未分組數據中，派彩總額佔投注總額之比率最細是 2011 年 6 月 23 日的 28.13%，最大之比率是 2011 年 3 月 26 日的 108.83%；細比率出現的開彩期數主要是頭獎和二獎無人中，大比率出現的期數主要是因前幾期無人中而出現鉅額累積金多寶。另外，我們計算出投注總額的平

均數是 HK\$4,3059,569，派總額的平均數是 HK\$23,703,177；投注總額的變異係數²⁰是 0.55，而派彩總額的變異係數是 0.91；可見平均投注總額明顯比平均派彩總額高，但派彩總額的波動卻比投注總額高。圖 5.1 描繪了由 2002 年 7 月 4 日至 2011 年 6 月 30 日共 1311 期的投注總額和派彩總額的線型圖，它展示出這兩個數列的特徵

圖 5.1 2002 年 7 月 4 日至 2011 年 6 月 30 日共 1311 期的投注總額 (TT) 和派彩總額 (TP)

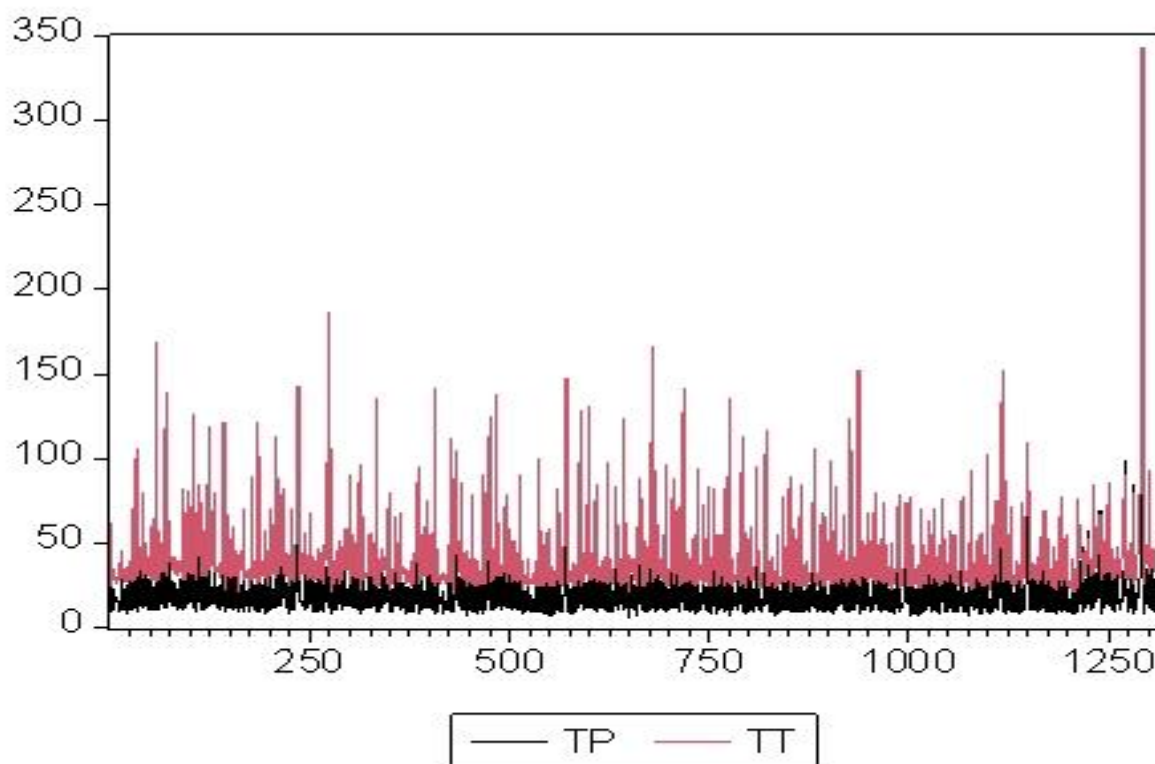


表 5.2 是把 1311 期計算出來的派彩總額用次數分配，我們可以利用這些數據來解釋投注者與投注者之間的博弈是否公平。組別欄中的 X 是代表某一期六合彩派彩總額佔投注總額的比率，我們發現在 1311 個六合彩賽局中，有 64.3%的機會派彩總額佔投注總額的比率是低於 54%，其中有 53.83%的機會派彩總額佔投注總額的比率是介於 30%和 40%之間。最值得注意的是有 6 期出現了派彩總額大過投注總額的情形，這 6 期是：2010 年 11 月 20 日，2010 年 12 月 11 日，2011 年 1 月 13 日，2011 年 1 月 29 日，2011 年 3 月 26 日，以及 2011 年 4 月 21 日。但這並不表示如果有投注者買了 49 個號碼的複式彩票就有利可圖；相反，他在這個賽局中只

²⁰ 變異係數 (Coefficient of variation) $CV = \frac{SD}{\bar{X}}$

能取回少於²¹ 49 個號碼的複式彩票的 $HK\$10 \times {}_{49}C_6 = HK\$139,838,160$ 投注額的 54%。其實，除了固定賠率的獎項以外，每個六合彩賽局的投注者都不知道其他投注者有沒有與他相同的單式投注²²；這就是說，一位打算採用大包圍方式的投注者，雖然知道他一定有 1 注中頭獎、6 注中二獎、258 注中三獎、630 注中四獎、135456 注中五獎、172206 注中六獎、以及 2466286 注中七獎²³，但因他不知在這賽局中究竟有多少注會中頭、二、三獎，當他明白了採用大包圍的方式仍然有風險存在，一定不會去進行大包圍的投注。總括來說，六合彩投注是自願、隨機和公平的賭博。

表 5.2 2002 年 7 月 4 日至 2011 年 6 月 30 日共 1311 期派彩總額佔投注總額比率的分配

組別	出現期數	出現期數之百分率	出現期數之累積百分率
$20\% \leq X < 30\%$	23	1.75%	1.75%
$30\% \leq X < 40\%$	706	53.85%	55.61%
$40\% \leq X < 54\%$	114	8.70%	64.30%
$54\% \leq X < 60\%$	87	6.64%	70.94%
$60\% \leq X < 70\%$	86	6.56%	77.50%
$70\% \leq X < 80\%$	135	10.30%	87.80%
$80\% \leq X < 90\%$	131	9.99%	97.79%
$90\% \leq X < 100\%$	23	1.75%	99.54%
$100\% \leq X < 110\%$	6	0.46%	100.00%
總計	1311	100%	--

6 結語

根據以上統計分析的結果，我們解釋了六合彩各獎項中獎的機率是怎樣算出來的；論證了六合彩各獎項中獎號碼是隨機出現，所以絕對不能準確預測；說明了六合彩營辦者在賽局中是遵守契約的規定，亦沒有證據令人懷疑頭獎和各獎項有造假的可能；解釋了增加六合彩攪珠號碼是透過令中獎機會降低，一方面使營辦者有調高獎金的空間，另一方面令累積金多寶更具吸引力，而調高每注單式彩票的金額的作用只是因應通脹情況作出的調整，目的也是維持賽局對投注者的吸引力；以及證明了六合彩是一項公平的賭博。

²¹ 投注 49 個號碼的複式彩票的 $HK\$10 \times {}_{49}C_6 = HK\$139,838,160$ ，按規定撥 54% 即 $HK\$75,512,606$ 加入獎金基金，因入獎金基金加累積金多寶的金額增大，令其他獲頭、二、三獎投注者的獎金也增加。

²² 由於在賽局中事件的數目太多，雖然營辦者可以透過電腦取得每個事件投注額的即時資料，但他不可能在博彩下注時公佈 ${}_{49}C_6$ 個事件的賠率，所以六合彩只是理論上的固定賠率博彩。

²³ ${}_{49}C_6$ 乘以表 4.1 所列各獎項的機率。

從微觀經濟學的角度來看：賭博對營辦者來說是一門生意，只要貨真價實就可以；賭博對投注者來說是一項娛樂的消費活動，只要理性地消費和不要依靠借貸來消費就可以。從宏觀經濟學的角度來看，雖然六合彩不會創造國民所得，但有所得再分配 (income redistribution) 的功能，即通過把社會消費基金的小部份再集中起來，作為資助各種福利事業。另外，賭博並沒有被列在聖經「十誡」²⁴中，在各民族的道德規範中，也只是勸喻世人不可沉迷賭博。我們必須以持平的態度來看待人們的賭博行為，只要賭博是自願、隨機和公平的行為，加上不會沉迷，便不是一件壞事。

參考文

Newbold, P. (1995), *Statistics For Business and Economics*, 4th Edition, Prentice-Hall International.

李治洪 (2000), 澳門博彩業法律制度研究, 澳門基金會

香港馬會六合彩, 網頁, 於 2011 年 7 月下載:

<http://bet.hkjc.com/marksix/default.aspx>

香港馬會獎券有限公司的獎券規例, 於 2011 年 7 月下載:

<http://www.668999.com/jqgl.html>

香港賭博條例, 《香港法例第 148 章》, 香港律政司雙語法例資料系統, 於 2011 年 7 月下載:

<http://www.legislation.gov.hk/chi/home.htm>

政府獎券條例, 《香港法例第 334 章》, 香港律政司雙語法例資料系統, 於 2011 年 7 月下載:

<http://www.legislation.gov.hk/chi/home.htm>

²⁴ 天主十誡是：(一)欽崇一天主在萬有之上、(二)毋呼天主聖名以發虛誓、(三)守瞻禮之日、(四)孝敬父母、(五)毋殺人、(六)毋行邪淫、(七)毋偷盜、(八)毋妄證、(九)毋願他人妻、(十)毋貪他人財物。

The working paper series is a series of occasional papers funded by the Research and Staff Development Committee. The objective of the series is to arouse intellectual curiosity and encourage research activities. The expected readership will include colleagues within Hong Kong Shue Yan University, as well as academics and professionals in Hong Kong and beyond.

Important Note

All opinions, information and/or statements made in the papers are exclusively those of the authors. Hong Kong Shue Yan University and its officers, employees and agents are not responsible, in whatsoever manner and capacity, for any loss and/or damage suffered by any reader or readers of these papers.



Department of Economics and Finance
Hong Kong Shue Yan University