院學仁樹

SHUE YAN COLLEGE

香 港 樹 仁 學 院

多個事件賽局問題的理論和應用(修正版)

林公豫

二零零三年九月

經 濟 學 系

Working Paper Series

Economics Department

Hong Kong Shue Yan College

Working Paper Series
September 2003

ISBN: 962-8719-28-9

Information on the Working Paper Series can be found on the last page. Please address any comments and further inquiries to:

Dr. Shu-kam Lee
Working Paper Coordinator
Department of Economics
Hong Kong Shue Yan College
10 Wai Tsui Crescent
Braemar Hill Road
North Point
Hong Kong
Fax: 28068044
Tel: 25707110
Email: sklee@hksyc.edu

多個事件賽局問題的理論和應用(修正版)

林公豫 [1]

一. 引言

現實中有許多博弈問題的賽局，可看作是多事件的賽局，例如賽馬問題的賽局，每場(局)參加競逐第一名的馬匹可能有 14 匹或 12 匹，則可看作該賽局共有 N=14 個事件或 12 個事件的賽局。具有 25 個號碼的輪盤賽局可看作有 N=25 個事件的賽局等等。對於這些賽局，投注者可選擇各種投注策略。現在我們提出一種策略，就是考慮選擇 n (n<N) 個局部事件投注的策略，即假定被選出的 n 個事件中，必有一事件發生，而捨去的 N- n 個事件不會發生。這種假定，在許多賽局，並不是沒有根據的，例如賽馬賽局，大熱門倒灶 (據統計只有 25%勝出)，大冷門陪跑是經常發生的，而輪盤賽局在某一時段也經常出現有若干個號碼不會開出。本文的主要目的，就是從理論上以致計算程序上解決部份事件的投注策略，亦即對每一事件投注多少金額才能贏取預先指定的金額的投注策略。

二. 問題的描述

設有一賽局，共有 N 個可能發生的事件。現取局部事件 n 個 (n<N)，記為 1, 2, 3, … n。假設這 n 個事件在賽局中必有一個事件發生 (若不發生則投注策略失敗)，並設事件發生時其相對應的賠率 (或回報率)分別為每事件的投注額的 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 倍，若該賽局要求贏取預先指定的金額 b，問對每一事件的投注金額是多少？

三. 問題的數學模型

設對每一事件的投注額為：

$X_1, X_2 \text{-------} X_n$

則上述問題導致要求解下列方程組

$$
\begin{array}{rrcr}
(C_1 - 1)X_1 & - X_2 - & \cdots\cdots\cdots & -X_n = b \\
-X_1 + & (C_2 - 1)X_2 - & \cdots\cdots\cdots & -X_n = b \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-X_1 & - X_2 & \cdots\cdots + & (C_n - 1)X_n = b
\end{array}
\qquad \text{———————————— (1)}
$$

令 $C_i - 1 = a_i$ $(i=1, 2, \text{----}n)$，且為了方便取 $b = 1$ 則方程組(1)的矩陣形式為:

[1] 林公豫先生是香港樹仁學院工商管理學系副教授，主要任教數學及統計學。

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & & & & -1 \\
 & a_2 & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & -1 & \ddots & \\
 & & & & a_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1
\end{bmatrix}
$$

故有

$$
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_1 & & & & -1 \\
 & a_2 & & & \\
 & & \ddots & & \\
-1 & & & \ddots & \\
 & & & & a_n
\end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix}
1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1
\end{bmatrix}
= A^{-1}V \quad \_\_\_\_\_\_ (2)
$$

這裏 $A = \begin{bmatrix}
a_1 & & & & \\
 & a_2 & & -1 & \\
 & & \ddots & & \\
 & -1 & & \ddots & \\
 & & & & a_n
\end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix}
1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1
\end{bmatrix}$

由於

$$
A = \begin{bmatrix}
a_1 & & & & \\
 & a_2 & & -1 & \\
 & & \ddots & & \\
 & -1 & & \ddots & \\
 & & & & a_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_1 + 1 & & 0 \\
 & a_2 + 1 & \\
0 & & \\
 & & a_{n+1}^2
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
-1 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ -1
\end{bmatrix}
[\,1\ 1\ \text{-----}\ 1\,]
$$

且因 $C_i = a_i + 1$ $(i = 1, 2, \ldots.n)$ 現令

$$
H = \begin{bmatrix}
C_i & & & 0 \\
 & C_2 & & \\
 & & \ddots & \\
0 & & & \ddots \\
 & & & C_n
\end{bmatrix}
\qquad
u = \begin{bmatrix}
-1 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ -1
\end{bmatrix}
$$

則有

$$A^{-1} = [H + uv^T]^{-1} \qquad \text{-------------------------} \qquad (3)$$

故模型(2)的求解，導致(3)式中的 A^{-1} 的計算。

四. A^{-1} 的計算公式

經過理論的推導，A^{-1} 有以下計算公式

$$A^{-1} = \left[H + uv^T\right]^{-1} = H^{-1} - \frac{H^{-1}uv^T H^{-1}}{1 + v^T H^{-1} u} \qquad \text{-------------} \qquad (4)$$

計算公式(4)的更一般形式，A.S. Householder 利用共軛矩陣理論已曾作了証明[1]，而本文在最後一節中則給出另一個較簡單而直接的証明，以供有與趣者參閱。

五. 算法程序

對計算公式(4)進行簡化，可得到一個計算模型(2)的算法，該算法既簡單又易於使用普通的程序計數器，解決一個 n = 10 的博弈問題只需三分鐘時間便可，而且，我們還給出該算法何時適用和何時不適用的判決條件。

依據(4)式，

$$因\ H^{-1}uv^TH^{-1} == \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{C_n} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & & & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{C_n} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{C_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{C_n} & -\frac{1}{C_n} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{C_n} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{C_n} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1C_1} & \frac{-1}{C_1C_2} & \cdots & \cdots & \frac{-1}{C_1C_n} \\ \frac{-1}{C_2C_1} & \frac{-1}{C_2C_2} & \cdots & \cdots & \frac{-1}{C_1C_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-1}{C_nC_1} & \frac{-1}{C_nC_2} & \cdots & \cdots & \frac{-1}{C_nC_n} \end{bmatrix} = -\left\{ \frac{1}{C_iC_j} \right\}_{nxn} \text{-----------------} \quad (5)
$$

而

$$
V^T H^{-1} u = [1,1,\cdots\cdots 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{C_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \qquad \text{--------} \quad (6)
$$

將(5)與(6)代入到(4)可得:

$$
\mathrm{A}^{-1} = \left[H + uV^T \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & \\ 0 & \ddots & \\ & & \frac{1}{C_n} \end{bmatrix} + \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}} \left\{ \frac{1}{C_iC_j} \right\}_{nxn} \text{----} \quad (7)
$$

將(7)式代入至模型(2)式可得:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{1}{C_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1^2} & \frac{1}{C_1 C_2} & \cdots & \frac{1}{C_1 C_n} \\ \frac{1}{C_1 C_2} & \frac{1}{C_2^2} & \cdots & \frac{1}{C_2 C_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{C_1 C_n} & \frac{1}{C_2 C_n} & \cdots & \frac{1}{C_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1}\left(1+\frac{\sum \frac{1}{C_i}}{1-\sum \frac{1}{C_i}}\right) \\ \frac{1}{C_2}\left(1+\frac{\sum \frac{1}{C_i}}{1-\sum \frac{1}{C_i}}\right) \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \frac{1}{C_n}\left(1+\frac{\sum \frac{1}{C_i}}{1-\sum \frac{1}{C_i}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1}\left(1+\frac{1}{1-\sum \frac{1}{C_i}}\right) \\ \frac{1}{C_2}\left(1+\frac{1}{1-\sum \frac{1}{C_i}}\right) \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \frac{1}{C_n}\left(\frac{1}{1-\sum \frac{1}{C_i}}\right) \end{bmatrix}$$

亦即:

$$x_k = \frac{1}{C_k}\left(\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}\right) \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots n \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (8)$$

從結果(8)可得計算 x_k 的程序如下:

(1) $C = \sum \frac{1}{C_i} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{C_n}\right)$

(2) D = 1 – C

(3) $E = \dfrac{1}{D}$

(4) $x_k = \dfrac{1}{C_k} xE$ k =1,2,3, ……. n

若要贏取金額 b 則對投注額 x_k 均乘以 b，即

(5) $X_k = \dfrac{1}{C_k}$ x E x b k = 1, 2, 3, …n

六. 應用

多事件賽局問題是很廣泛的，不僅在賽馬問題，輪盤問題，骰子大小問題，而且在經濟金融投資問題都應該找到它的應用。不過在利用上述算法時，要注意：

（1） 若 $C \geq 1$ 不可行
（2） 若 $0.85 < C < 1$ 不適宜投注，因這時 D 太細而 E 較大即 x_k 較大，不合符博彩原則。

下面我們試拿某個賽馬夜 (2002 年一月十三日夜晚)的兩場賽局來討論。

例 1) 該賽局共有 N=10 匹馬競賽，各匹馬勝出時的賠率已知為

事件	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
賠率	3.2	5	5.9	7.5	8	11	15	20	25	29

若把大熱門，次熱門，大冷門及次冷門四匹馬捨去，只考慮剩餘的 n=6 匹馬，則按上述算法，得：

(1) $C = \sum \dfrac{1}{C_i} = \dfrac{1}{5.9} + \dfrac{1}{7.5} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{20}$

$= 0.169 + 0.133 + 0.125 + 0.091 + 0.067 + 0.05$

$= 0.647$

(2) $D = 1 - C = 1 - 0.647 = 0.353$

(3) $E = \dfrac{1}{D} = \dfrac{1}{0.353} = 2.832$

設取 b = 1,000 元則依

(4)及(5) $X_k = \frac{1}{C_k}$ x E x b k = 1, 2, 3, 4, 5, 6

得 $X_1 = 480$ 元 $X_2 = 380$ 元 $X_3 = 350$ 元 $X_4 = 260$ 元 $X_5 = 190$ 元 $X_6 = 140$ 元

總投注額為 $\sum X_k = 1800$ 元

該場馬賽，結果是 15 倍的馬勝出，即事件 7 發生。

例 2) 另一場 (賽局)共有 14 匹馬，共相對應的賠率為：

事件	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
賠率	5.7	5.9	7	7.6	7.9	10	12	13	16	21	22	30	43	62

若放棄大熱，次熱，及最後三匹大冷馬不考慮，則運用上述算法得

(1) $C = \frac{1}{7} + \frac{1}{7.6} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{16} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22}$

$= 0.143 + 0.131 + 0.126 + 0.1 + 0.083 + 0.076 + 0.062 + 0.047 + 0.045$

$= 0.813$

(2) $D = 1 - C = 0.187$

(3) $E = \frac{1}{D} = 5.347$

設取 b = 1,000 元則依 (5)可得

$X_1 = 760, X_2 = 700, X_3 = 670, X_4 = 530, X_5 = 443, X_6 = 400, X_7 = 330,$

$X_8 = 250, X_9 = 240$

總投注額為 $\sum X_i = 4{,}320$ 元

該場馬勝出的是 12 倍馬，即事件 7 發生。

除了上述兩場馬，該夜還有 5 場馬，其中四場勝出的頭馬的賠率分別為 6.3 倍，8.6 倍，10 倍和 15 倍，均不是大熱，次熱及最冷的三匹。因此，若運用我們所得到算法，均可

贏取預先指定的金額。根據統計和觀察，連場大熱倒灶的賽馬日(或夜)是經常發生的，而一般投注者最難對付的也是這些賽局。如果我們能把握時機，看準機會，反而能使我們輕易地贏取預先指定的金額。

例 3) 25 門輪盤賽局問題

若選 17 個事件投注，因賠率均為 23，即 $C_1 = C_2 = \ldots. = C_{17} = 23$
於是

$$C = \sum_{i=1}^{17} \frac{1}{C_i} = 17 \times \frac{1}{23} = 0.739$$
$$D = 1 - C = 0.261$$
$$E = \frac{1}{D} = \frac{1}{0.261} = 3.81$$
$$x_k = \frac{3.831}{23} = 0.166$$

若要贏取金額$1000，則投注額為：

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{17} = \$170$$

總投注額為 17 x 17 = $2,890
若選 18 個事件投注則 $C_1 = C_2 = \cdots\cdots = C_{18} = 23$
於是

$$C = \sum_{i=1}^{18} \frac{1}{C_i} = 18 \times \frac{1}{23} = 0.782$$
$$D = 1 - C = 0.218$$
$$E = \frac{1}{D} = 4.587$$
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{18} = \frac{4.587}{23} = 0.1994$$

若要贏取金額$1,000 則投注金額 x_k(k=1,2…..18)均為例$200
總投注額 18 x 200 = $3,600

七. 結語

以賽馬賽局為例，我們經常遇到這些大熱門倒灶的賽局。這些賽局，投注者大多數早已認為熱門馬並不穩健，或者是馬匹實力並不強，不值得那麼熱，或者認為騎者騎不好這些馬，或者是該馬房很少贏熱門馬等等理由，預先多數都判斷這一兩匹熱門馬會倒灶，該場馬一定爆冷。這種預測，多數都是正確的。但問題是明知該賽局會大熱倒灶，但究竟那匹馬勝出呢，則更費思量。本文的目的就是提供一種選擇若干匹(n 匹)馬來全部投注，從數學模型的建立直至得到的算法，我們解決了為了贏取預先指定的金額而各匹馬應投注的金額。這一策略，是一種穩健的策略。但是，應該指出，這種投注策略仍然是有風險的，需要我們小心考察。譬如上述某賽馬夜，六場中有五場爆冷，但我們較有把握地選中兩三場來投注就够了。例如上述例 1)中，假如我們能判斷所選的六匹馬中有一匹馬勝出的概率為 0.7，則我們可計算出這一賽局贏取金額的期望值：

X (收入)	-1800	1000
P (概率)	0.3	0.7

$E(x) = 0.3x(-1800) + 0.7x1000 = 160 > 0$ 顯然是值得博彩的。

同樣，例 2)中，只當我們選取的九匹馬有一匹馬勝出的概率大於或多於 0.80，才值得投注，因這時

X (收入)	-4320	1000
P (概率)	0.15	0.80

期望值 $E(x) = 0.15x(-4320) + 0.80x1000$
$= -648 + 800$
$= 152 > 0$

多事件的賽局是很廣泛的，就是賽馬賽局，若考慮連贏位的事件，選 6 匹馬就有 15 個事件，若考慮單 T，6 匹馬則共有 20 個事件，大小骰子賽局選擇三骰子點數和為 7 點至 12 點，就有 5 個事件等等。本文對多事件賽局所建立的投注策略的依據，講俗一點，就是人們所說的 “跟紅頂白”的依據。“紅”不一定是熱門，例如賽馬賽局，“紅”是指非熱門，因為熱門倒灶的機會是 75%，但對其它多事件賽局，“紅”則可能是指熱門號碼，而 “白”則指盲門及冷門號碼。

八. 關於計算公式 (4)的証明

設 I + M 非異 且令$(I + M)^{-1} = I + B$ ------------------------------ (1)

這裏 I 為單位陣，M 和 B 均為與 I 同階的方陣

則有 (I + M) (I + B) = I M + B + MB = 0 ------------------------------ (2)

(I + B) (I + M) = I B + M + BM = 0 ------------------------------ (3)

故知 BM = MB，即 B 和 M 是可交換的(4)

現令 $B=\frac{1}{k}M$ 這時 B 顯然是可與 M 可交換的

代入(2)式或(3)式可得：$(1+k)M + M^2 = 0$ ------------------------------ (5)

令 $M = uv^T$ u,v 為列量，則 $B=\frac{1}{k}uv^T$

依(5)得 $(1+k)uv^T + uv^T uv^T = (1+k+v^T u)uv^T = 0$ ------------------------------ (6)

故可取

$k = -(1 + v^T u)$

於是 $(I+M)^{-1} = I + B = I + \frac{1}{k}M = I - \frac{uv^T}{1+v^t u}$ ------------------------------ (7)

現在引入非異陣 H，再令 $M = uv^T$ 中的 u 為 $u = H^{-1}u$

則有 $(I + H^{-1}uv^T)^{-1} = I - \frac{H^{-1}uv^T}{1+v^T H^{-1}u}$ ------------------------------ (8)

而另一方面 $H + uv^T = H(I + H^{-1}uv^T)$

$(H + uv^T)^{-1} = (I + H^{-1}uv^T)^{-1}H^{-1}$

利用(8)可得 $(H+uv^T)^{-1} = (I - \frac{H^{-1}uv^T}{1+v^T H^{-1}u})H^{-1} = H^{-1} - \frac{H^{-1}uv^T H^{-1}}{1+v^T H^{-1}u}$

即 $(H+uv^T)^{-1} = H^{-1} - \frac{H^{-1}uv^T H^{-1}}{1+v^T H^{-1}u}$ ------------------------------ (9)

<証完>

應該指出，結果(9)只要求 H 非異，u， v 為列向量便可應用，即任一方陣 A，只要能寫成

$$A = H + uv^T$$

則計算 A^{-1} 便可利用(9)式計算，而公式(4)的 H 和 u，v 只是一特殊形式，那裏的

$$H = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

參考文獻

1. Householder A.S., The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell, New York, 1964.

The working paper series is a series of occasional papers funded by the Research and Staff Development Committee. The objective of the series is to arouse intellectual curiosity and encourage research activities. The expected readership will include colleagues within Hong Kong Shue Yan College, as well as academics and professionals in Hong Kong and beyond.

Important Note