



香 港 樹 仁 學 院

經 濟 學 系

再論《多個事件博弈問題的理論和應用》

潘志昌

二零零三年九月

Working Paper Series

Economics Department

Hong Kong Shue Yan College

All Rights Reserved
ISBN: 962-8719-31-9
Copyright © 2003 by Hong Kong Shue Yan College

Information on the Working Paper Series can be found on the last page. Please address any comments and further inquiries to:

Dr. Shu-kam Lee
Working Paper Coordinator
Department of Economics
Hong Kong Shue Yan College
10 Wai Tsui Crescent
Braemar Hill Road
North Point
Hong Kong
Fax: 28068044
Tel: 25707110
Email: sklee@hksyc.edu

再論《多個事件博弈問題的理論和應用》

潘志昌

一. 導言

讀完林公豫先生的《多個事件博弈問題的理論和應用》大文後，很欣賞他花費在導出了計算賽局中多個事件最適投注額算式的心思和努力。林先生沒有掌握到博弈理論的基礎概念是該文章的最大瑕疵。再者，由於不是對賽局中所有事件都下注，當然會衍生出例如怎樣去選擇或放棄賽局中某些投注事件的客觀準則，和如何估計所選定的一籃子投注事件之贏局期望值等問題；可惜，文章內卻沒有詳細論證。雖然如此，這篇文章仍然是具啟發性的。

參加博弈賽局，目的是跟對手一較高低；而較量高低的結果一般是勝敗或贏輸。人們之所以要較量高低或喜歡較量高低，究其原因，除了要顯示自己有過人之處這種不切實際的念頭，不外乎是出於娛樂動機或經濟動機，或該兩個動機不同程度的混合。當然，對耽溺者而言，就另作別論。既然人們對博弈賽局是有需求，除了部份可以隨時隨地組織成局之外，那些規模較大，參與人數較多的賽局，自然會有營辦者會基於與眾同樂、慈善或謀利等動機出來組織；本文就是討論這類型的賽局。博弈理論是研究兩人(或以上)互相會因對方決策而影響個別損益的決策問題，這正是博弈賽局的投注者與營辦者要面對的問題。本文首先討論林先生導出之數學模型¹的創意，然後依據這些公式作為分析多個事件博弈問題的基礎，進而探討賽局的博弈行為，最後嘗試討論營辦者就勝出事件賠率的設定是否公平公道的問題。

二. 投注額計算公式

首先我們借用林先生文章中的例二作為實例討論，但不同之處是全個賽局只有 9 個事件；用林先生的符號是 $n=N$ ，不是 $n<N$ 。假設投注時公佈的賠率是 C_j ，根據 (附錄一) 公式 A3，A3.1，A3.2，和 A3.3 計算的結果，表一展示了若某一投注者打算贏取 1 千元，他必須就 9 個事項分別依次落注 780 元、718 元 ... 260 元以及 248 元；即在這賽局中，他以 4459 元的總投注額，就必定能夠獲取約 1000 元的盈利。在表一中， C_j 和 X_j 分別是第 j 事件的賠率和投注額； C 是賽局中所有事件賠率倒數的總和； W_j 是第 j 事件勝出後，投注者所贏取的彩金； G_j 是無論那一個事件勝出投注者在賽局中將會獲取的盈利。

¹ 為方便讀者查閱，附錄一覆述了林先生文章中的數學模型。

表一

事件	C_j	$1/C_j$	$E = \frac{1}{1-C}$	$X_j = \frac{1000}{C_j} \cdot E$	$W_j = C_j \times X_j$	$G_j = W_j - \sum X_j$
1	7	0.1428571	5.459957762	779.993966	5459.95776	1000.000151
2	7.6	0.1315789	5.459957762	718.415495	5459.95776	1000.000151
3	7.9	0.1265823	5.459957762	691.1338939	5459.95776	1000.000151
4	10	0.1	5.459957762	545.9957762	5459.95776	1000.000151
5	12	0.0833333	5.459957762	454.9964802	5459.95776	1000.000151
6	13	0.0769231	5.459957762	419.9967509	5459.95776	1000.000151
7	16	0.0625	5.459957762	341.2473601	5459.95776	1000.000151
8	21	0.047619	5.459957762	259.9979887	5459.95776	1000.000151
9	22	0.0454545	5.459957762	248.1798983	5459.95776	1000.000151
總計	-- --	$C = 0.8168484$	-- --	4459.957609	-- --	-- --

林先生的文章用了 5 頁篇幅來導出計算 X_j 值的公式，我們想知道是否有其他常用的公式亦可準確算出 X_j 值。現在讓我們看看林先生提出的方程式組 (A1)：

$$\left. \begin{array}{ccccccc} (C_1 - 1)X_1 & - X_2 & - X_3 & - \dots & - X_k & = & b \\ -X_1 & + (C_2 - 1)X_2 & - X_3 & - \dots & - X_k & = & b \\ -X_1 & - X_2 & + (C_3 - 1)X_3 & - \dots & - X_k & = & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ -X_1 & - X_2 & - X_3 & - \dots & + (C_k - 1)X_k & = & b \end{array} \right\} \dots\dots\dots (A1)$$

令 $C_j - 1 = a_j$ ，式 (A1) 可改寫成：

$$\left. \begin{array}{ccccccc} a_{11}X_{11} & - X_{12} & - X_{13} & - \dots & - X_{1k} & = & b \\ -X_{21} & + a_{22}X_{22} & - X_{23} & - \dots & - X_{2k} & = & b \\ -X_{31} & - X_{32} & + a_{33}X_{33} & - \dots & - X_{3k} & = & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ -X_{n1} & - X_{n2} & - X_{n3} & - \dots & + a_{nk}X_{nk} & = & b \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

其中， $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ； $j = 1, 2, 3, \dots, k$ ； $n = k$

式(1) 就是一群以 b_i ($b_i = b$) 為應變數， a_{ij} 為自變數，($a_{ij} =$ 第 j 事件出現之賠率減去 1，當 $i = j$ ；和 $a_{ij} = -1$ ，當 $i \neq j$)，第 j 事件之投注額 X_j 為參數，以及截距為零的多元線性迴歸的組合點。由於式(1) 中的每一條方程式左則的數值必等於其右則的數值，所以這群組合點的相關係數必為 1，反之亦然。即是說，我們可以用多元線性迴歸模型來求解 X_j 值。除了 Excel 不計算自變數值範圍中的欄列個數相等的迴歸模型，一般常用的統計軟件都可以計算觀察值等於自變數的數目($n = k$) 的迴歸模型。我們使用 SPSS 統計軟件來計算 X_j 值，其結果與表二中所列出的 X_j 值完全一樣，而且算出的相關係數亦為 1 (請參閱附錄二)。這樣看來，林先生提出式(A1) 作為用來解釋賽局行為是智慧的表現；但浪費了不少時間來推導出 A3.3，那就有些令人惋惜了。

三． 博弈行為

在表一中，若營辦者公佈的賽局賠率是固定不變，投注者採用上述公式來決定各事件的投注額 X_j 並且對全部($n=9$) 事件投注，就肯定會贏取 1000 元。當然，在現實世界裡是絕對不會有人願意向他人提供這種近乎不勞而獲的賺錢機會。我們知道賠率是由接受投注之營辦者決定的。除了那些賽局其事件出現是完全服從隨機分配，營辦者只須根據各事件出現概率的倒數加上一個溢價值(γ)，即 $\frac{1}{P(X_j)} + \gamma$ ，便可制定賽局賠率；但

是，若賽局事件出現不屬於概率分配的範疇²，賠率就要視乎投注者對賽局中各事件的投注額而決定。設賽局中有 H 個投注者，營辦者會根據各事件 j 的總投注額 ($\sum_{h=1}^H X_{hj}$)，以及他打算在賽局中抽取的金額 m ，來決定各事件勝出之賠率。因為營辦者在開始接受和截止接受投注的期間內，對他來說，所有投注額是已知數；當 m 值決定了之後，根據設定方程組 (A1) 的道理，賠率 (C_j) 便可以輕易求得。其方程組如下：

$$\left. \begin{array}{ccccccc} -(C_1 - 1) \sum X_1 & + \sum X_2 & + \sum X_3 & + \dots & + \sum X_k & = & m \\ \sum X_1 - (C_2 - 1) \sum X_2 & + \sum X_3 & + \dots & + \sum X_k & = & m \\ \sum X_1 & + \sum X_2 - (C_3 - 1) \sum X_3 & + \dots & + \sum X_k & = & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \sum X_1 & + \sum X_2 & + \sum X_3 & + \dots & - (C_k - 1) \sum X_k & = & m \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

² 以賽馬博彩為例，各場出賽馬匹的編號與該馬匹和騎師的實力是完全沒有關係的，所以不能從過去各場賽事勝出馬匹的編號來估計某一場賽事中各馬匹編號勝出的概率分配函數。當然，我們可以用過去賽事中根據各馬匹的賠率從低到高來重新編排馬匹號碼(C_j 賠率馬)，再根據觀察多場賽果(樣本) 所得出的相對次數分配來估計某一場賽事中每匹出賽馬匹依其冷熱 (賠率高低) 排序的勝出概率分配函數。雖然馬匹賠率高低與其勝出的機會應該是”高負相關”，但問題仍然是投注額決定賠率，而並非馬匹原來編號決定賠率。不用說在賽事剛開始接受投注時，甚至在賽事截止接受投注前 1 分鐘，誰也不能肯定各馬匹的賠率，也不能肯馬匹正確的冷熱排序，所以亦無從採用那個由事後分析而求得的勝出概率分配函數作為(被林先生認為是唯一的)投注決策資料；由此可知，各場出賽馬匹的編號是與賠率無關，更與贏輸無關，賽局事件出現自然不屬於概率分配的範疇。

因投注額為已知數，式(2) 可寫成：

$$\left. \begin{aligned} C_1 \sum_{h=1}^H X_{h1} &= \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^k X_{hj} - m \\ C_2 \sum_{h=1}^H X_{h2} &= \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^k X_{hj} - m \\ &\vdots \\ C_k \sum_{h=1}^H X_{hk} &= \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^k X_{hj} - m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

根據方程組(3)，可導出計算營辦者在賽局中各事件勝出的賠率：

$$C_j = \frac{\sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^k X_{hj} - m}{\sum_{h=1}^H X_{hj}} \dots\dots\dots (4)$$

即第 j 個事件勝出的賠率是，總投注額與營辦者打算在賽局中賺取的金額之差，再除以第 j 個事件的投注總額，所求得之商。設溢價率是 β ，現以總投注額的 $\beta\%$ 即 $\beta \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^k X_{hj}$ 來代替 m，式(4) 可改寫成：

$$C_j = \frac{(1 - \beta) \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^k X_{hj}}{\sum_{h=1}^H X_{hj}} \dots\dots\dots (5)$$

就以上述表一的博弈賽局為例，假設有 800 位投注者 ($H=800$)以及他們就各事件的投注總額為表一投注者 ($X_{h=1}$ 可視為平均投注額) 的 100 倍³ ($\sum_{h=1}^H X_{1j} = 100X_{1j}$)。當營辦者收了如表一所列的投注後，假設他在這賽局中要賺取總投額的百分之十 ($\beta=10\%$)或 44,590 元作為盈利，表二最後一欄載錄了根據式(5) 計算出來的各事件勝出之賠率：

³ 每一賽局中，不論投注者們對各事件有不同的投注策略和投注額，就營辦者而言，他只是看每個事件的投注總額。而投注總額是平均投注額的多少倍，是不會影響賠率的。

表二：

事件	X_{1j}	$\sum_{h=1}^H X_{hj} = 100 \times X_{1j}$	$(1-\beta) \sum_{j=1}^8 \sum_{h=1}^{800} X_{hj}$	$C_j = \frac{(1-\beta) \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^k X_{hj}}{\sum_{h=1}^H X_{hj}}$
1	780	78000	401310	5.145
2	718	71800	401310	5.589275766
3	691	69100	401310	5.807670043
4	546	54600	401310	7.35
5	455	45500	401310	8.82
6	420	42000	401310	9.555
7	341	34100	401310	11.7686217
8	260	26000	401310	15.435
9	248	24800	401310	16.18185484
總計	4459	445900	---	---

現在又要回到投注者的位置。投注者要接受兩個事實：接受四百多元的虧損，和明白這個賽局已無有利可圖的大包圍的投注組合。由於營辦者要在總投注額 445,900 元中賺取 44,590 元，如表三最後一欄顯示，任何一位根據表一投注策略之投注者必會在這賽局中損失平均約 447 元⁴；表三第三欄的總額是 $C = \sum \frac{1}{C_j} = 1.11$ ，依據式(A3)，若 $C \geq 1$ 則

式(A2.8)的投注方法是不可行，所以這個賽局已無有利可圖的大包圍的投注組合。簡而言之，我們這裡所討論的博弈行為是指投注者之投注策略與營辦者設定賠率之策略的相互反應行為。雖然賠率的最終決定權是掌握在營辦者手中，當投注者預先知道營辦者設定賠率的機制，賽局最基本的博弈策略是玩還是不玩，其實還是由投注者自己決定。

⁴ 因營辦者公佈的賠率只取小數點後一位數字，算出來的 j 個虧損額基於捨入原因而不相等。447 元是各虧損額的平均數。

表三：

事件	C_j	$1/C_j$	$X_j = \frac{1000}{C_j} \cdot E$	$W_j = C_j \times X_j$	$G_j = W_j - \sum X_j$
1	5.1	0.1960784	780	3978	-481
2	5.6	0.1785714	718	4020.8	-438.2
3	5.8	0.1724138	691	4007.8	-451.2
4	7.4	0.1351351	546	4040.4	-418.6
5	8.8	0.1136364	455	4004	-455
6	9.6	0.1041667	420	4032	-427
7	11.8	0.0847458	341	4023.8	-435.2
8	15.4	0.0649351	260	4004	-455
9	16.1	0.0621118	248	3992.8	-466.2
總計	-- --	1.1117944	4459	-- --	-- --

四. 博弈對局的公平與公道

1. 公平博弈問賽局題的探討

從數學的觀點來看，公平博弈是指零和賽局，即所有參與賽局者的贏輸期望值皆為零。簡單來說，若某賽局之參與者在長時期持續地投注或受注活動中，平均計算，最終彼此都沒有贏輸，則該賽局便是公平博弈。如式(A3) 所示，若 $C = 1$ ，該賽局是公平博弈。

博弈賽局的例子在現實生活中俯拾即是。所以，多事件博弈問題的應用是非常廣泛：如輪盤，骰子大小、角子老虎機、足球博彩、以及賽馬等等；在凡可以界定賽局中所有事件發生之機率(其加總等於一) 的博弈問題上，都可以派上用場。

我們可以把博彩分為固定賠率和浮動賠率兩大類。例如上述之輪盤，骰子大小和角子老虎機，足球博彩等，因賠率是在博彩下注時營辦者所設定的，它們都是屬於固定賠率博彩類別，其特點是事件的發生是服從數學機率或經驗機率⁵。須要特別指出的是六合彩(安慰獎除外)，由於在賽局中事件的數目太多⁶，雖然營辦者可以透過電腦取得

⁵ 數學機率 (mathematical probability) 是指所希望的結局在所有無差別的可能結局中所佔的比例；經驗機率 (empirical probability) 是指在樣本中觀測到的比例。見《數學辭典》頁 576。

⁶ 以中頭獎為例，在 49 個號碼中出現 6 個的組合共有 ${}_{49}C_6 = 13,983,816$ 個事件可能出現。

每個事件投注額的即時資料，但他不可能在博彩下注時公佈約一千四百萬個事件的賠率，所以六合彩只是理論上的固定賠率博彩；而且由於六合彩不能界定賽局中各事件的賠率，所以不可以應用上述多事件博弈問題模型來決定博弈策略。賽馬是曲型的浮動賠率博彩例子，其特點是事件發生的機率是受到很多內在和外因素所影響；而這些因素對某事件的勝出機率大致上是透過投注額反映出來。

以 25 門輪盤博彩為例，因賠率均為 23，即 $C_1 = C_2 = \dots = C_{25} = 23$ ，由於 $C = \sum_{j=1}^{25} \frac{1}{C_j} = 25 \times \frac{1}{23} = 1.087 > 1$ ，該賽局不是公平博弈。甚至那被錯覺認為賠率為 2 的骰子大小博彩，因出現三個骰子點子相同時賠率為零，因此 $C = \sum_{j=1}^{6 \times 6 \times 6} \frac{1}{6 \times 6 \times 6 - 6} = \frac{216}{210} = 1.029$ ， $C > 1$ ，該賽局亦不是公平博弈。香港馬會 2003 年 8 月推出之規範化足球博彩，以總入球賠率為例，計算出來的 C 值⁷是介於 1.352 與 1.360 之間，平均是 1.356；因 $C > 1$ ，足球博彩不是公平博弈。

屬於浮動博彩類的賽馬博彩，由賽事開始接受投注起，參考賠率會跟隨各出賽馬匹(即事件)之投注額的不同增幅而變動，直至賽事截止投注時所公佈的賠率才是實際賠率。經過抽樣計算三天共 29 場的跑馬賽事，發覺由實際賠率算出的 C 值⁸是介於 1.215 與 1.265 之間，平均是 1.237；因 $C > 1$ ，賽馬博彩不是公平博弈。

2. 公道博弈賽局問題的探討

在賽局之中，當某一事件出現概率的倒數等於其賠率，由於所有事件的概率加總等於 1，所有事件賠率的倒數加總亦等於一；因此，賽局中所有事件賠率倒數的總和等於 1 ($C=1$)，可以作為決定博弈賽局是否公平的指標。上節論及的各項博弈賽局都不是公平賽局，即是說利益總是歸於營辦者。上文已提及，在現實世界裡是沒有營辦者會願意向投注者提供無利可圖甚至招致虧損的賽局；因此，我們不應該著眼於博弈賽局是否公平，而是要看是否公道。

博弈賽局是否公道，我們可以令 $\alpha = C - 1$ (C 是賽局中各事件賠率倒數的總和)，利用 α 的實際值與其均衡值 $\bar{\alpha}$ 的距離作為衡量的準則：實際 α 值是透過營辦者所設定的賠率再依據式(5)計算出來的；而 $\bar{\alpha}$ 是由那反映營辦者提供賽局之成本、打算謀取之利潤以及在市場上營辦者之總數的賽局供給曲線(或供給量)，那反映投注者由於參與賽局所獲取之滿足感淨值以及在市場上之投注者總數的賽局需求曲線，這兩條以 α 為縱軸投注者數目為橫軸的曲線相交點位置所決定。在一般情況下，若營辦者的成本愈高，在市場上營辦者之總數愈少，投注者將會獲取的滿足感淨值愈大，和在市場上之投注者總數愈多，則 $\bar{\alpha}$ 會愈低；反之則反。可惜由於資料搜集的困難和變數的量度問題，要計算出 $\bar{\alpha}$ 值似乎是一件徒勞無功的事情。

既然定量分析不可行，我們只可用定性分析方法，透過觀察各博彩賽局及其參與者的性質和特徵，再參考其它國家同類型賽局的賠率安排，從而那類賽局是比較公道。雖

⁷ 有關之各場賠率及 C 值計算，請參閱附錄三。

⁸ 有關之各場賠率及 C 值計算，請參閱附錄四。

然均衡 α 值只是一個理論概念，但畢竟實際 α 值的計算已經向我們提供了一個衡量博弈賽局是否公道的指標。例如上述的香港賽馬會組織跑馬賽局所涉及的费用，肯定高過香港馬會足球博彩有限公司組織足球博彩賽局，但足球博彩賽局的平均 α 值 ($1-1.356 = 0.356$) 竟會高過跑馬賽事賽局的平均 α 值 ($1-1.237 = 0.237$)；由此可以推斷，就投注者而言，香港的跑馬博彩和規範性足球博彩的賠率，前者較為公道。

五. 結論

投注者們輸贏的總差額，一方面是營辦者的收入(大概包括營辦賽局的固定和運作成本，法定捐贈，稅捐，以及利潤)，另一方面是投注者因參加賽局而獲得滿足感所要付出的代價。本文的主旨就是要探討投注者跟營辦者在有利益衝突的情勢下，策略最佳選擇的數學理論。根據以上分析，我們可以推斷，對投注者而言，他們可以說贏局的機會很高，但不可以說有必贏的賽局。有些投注者，在不計較其支付給營辦者的代價是否公道，亦不考慮是否在賽局中感覺是娛樂，只憑一己對運氣和直覺的信心以及博彩的經驗，以贏取彩金為目標而下注；結果，參與賽局之時間愈長，則輸去的金錢必會愈多。不像上文所述在賽局中所有事件均投注的方法下，賽局的結果(收益或虧損) 是肯定的；當投注者在賽局中只投注某一或者某些事件，賽局的結果便會變為不肯定。這種會導致贏取或輸去某金額的賭博行為，除了數學以外，還涉及諸如倫理學，心理學，社會學，和經濟學等範疇，應該是一項很有意思的研究課題。

附錄一： 決定投注額之數學模型⁹

設有某種博弈賽局，每局可能發生事件共有 k 個，記為 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ ；而且 k 個事件發生的機率總和為 1。已知每局勝出的事件只有一個，而其相對應的賠率假定為 $C_1, C_2, \dots, C_k$ 倍。若每局要贏取預先指定的金額 b ，博弈對局投注者應該如何決定對每一事件投注額的多少，這個問題可以運用下述數學模型找到答案。

1. 數學模型的設定

$$\left. \begin{array}{ccccccc} (C_1 - 1)X_1 & -X_2 & -X_3 & \dots & -X_k & = & b \\ -X_1 & (C_2 - 1)X_2 & -X_3 & \dots & -X_k & = & b \\ -X_1 & -X_2 & (C_3 - 1)X_3 & \dots & -X_k & = & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -X_1 & -X_2 & -X_3 & \dots & (C_k - 1)X_k & = & b \end{array} \right\} \dots\dots\dots (A1)$$

令 $C_j - 1 = a_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$)，則方程組 (A1) 的矩陣形式為：

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & -1 \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ -1 & & & & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A1.1)$$

用向量和矩陣¹⁰表示，式(A1.1)可寫為 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \dots\dots\dots (A1.2)$

其中， $\mathbf{A}$ 是一個 $k \times k$ 方矩陣： $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & -1 \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ -1 & & & & a_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A1.3)$

⁹ 本節主要是覆述 2003 年 9 月份 Shue Yan Economics Working Paper 林公豫撰寫之《多個事件博弈問題的理論和應用(修正版)》的理論模型；除了在符號上稍作更改外，主要不同之處是林先生是取 $\sum P(X_j) < 1$ ，但本文是取 $\sum P(X_j) = 1$ 。

¹⁰ 如無特別指定，向量是指直立向量，用粗體小楷英文字母表示；矩陣用粗體大楷英文字母表示。

而 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}$ 都是一個 $k \times 1$ 向量：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \\ b \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A1.4)$$

由於

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & -1 \\ & & \ddots & & \\ & -1 & & \ddots & \\ & & & & a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+1 & & & & 0 \\ & a_2+1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & & a_k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \dots 1]$$

且因 $C_j = a_j + 1$ ($j = 1, 2, \dots, k$)，現今

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & 0 \\ & C_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & C_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A1.5)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{v}^T = [1 \ 1 \dots 1 \ 1] \dots\dots\dots (A1.6)$$

即式(A1.3) 可改寫成： $\mathbf{A} = \mathbf{H} - \mathbf{u} \mathbf{v}^T \dots\dots\dots (A1.7)$

將式(A1.7) 代入式(A1.2)，方程組(A1) 可改寫成： $[\mathbf{H} - \mathbf{u} \mathbf{v}^T] \mathbf{x} = \mathbf{b} \dots\dots\dots (A1.8)$

2. 未知值的求解

在方程組(A1) 中， k 個未知值是包含 k 個各有一個未知值的方程式中，因此各未知值必有定解。要贏取金額 b ，每一事件的投注額的決定可以藉著解方程組 (A1) 而求得，該公式為：

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & -1 \\ & & \ddots & & \\ & -1 & & \ddots & \\ & & & & a_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \\ b \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A2)$$

用向量和矩陣表示，式(A2) 可寫為 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \dots\dots\dots (A2.1)$

將式(A1.7) 代入式(A2.1) ，得： $\mathbf{x} = [\mathbf{H} - \mathbf{uv}^T]^{-1} \mathbf{b} \dots\dots\dots (A2.2)$

根據共軛矩陣的逆矩陣計算公式(Householder, 1964；Atkinson, 1988)， $\mathbf{A}^{-1}$ 有以下計算公式：

$$\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{H} - \mathbf{uv}^T]^{-1} = \mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{u}(1-\mathbf{v}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{u})^{-1}\mathbf{v}^T\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} + \frac{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{uv}^T\mathbf{H}^{-1}}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{u}} \dots\dots\dots (A2.3)$$

依據式(A2.3)，我們可導出一個計算方程組(A1) 中 X_j 值的簡單公式：

$$\text{因： } \mathbf{H}^{-1}\mathbf{uv}^T\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{C_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{C_k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} & \dots & \dots & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & \dots & \dots & \frac{1}{C_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{C_k} & \frac{1}{C_k} & \dots & \dots & \frac{1}{C_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \frac{1}{C_k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 C_1} & \frac{1}{C_1 C_2} & \dots & \dots & \frac{1}{C_1 C_k} \\ \frac{1}{C_2 C_1} & \frac{1}{C_2 C_2} & \dots & \dots & \frac{1}{C_2 C_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{C_k C_1} & \frac{1}{C_k C_2} & \dots & \dots & \frac{1}{C_k C_k} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{C_i C_j} \right\}_{k \times k} \dots \dots \dots (A2.4)
\end{aligned}$$

而：

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{u} = [1, 1, \dots, 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{C_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{C_j} \dots \dots \dots (A2.5)$$

將式 (A2.4)與式(A2.5)代入到式(A2.3)得：

$$\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{H} - \mathbf{u} \mathbf{v}^T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{C_k} \end{bmatrix} + \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{C_j}} \left\{ \frac{1}{C_i C_j} \right\}_{k \times k} \dots \dots \dots (A2.6)$$

將式(A2.6)式代入式(A2)可得：

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{C_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \\ b \end{bmatrix} + \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{C_j}} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1^2} & \frac{1}{C_1 C_2} & \cdots & \frac{1}{C_1 C_k} \\ \frac{1}{C_1 C_2} & \frac{1}{C_2^2} & \cdots & \frac{1}{C_2 C_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{C_1 C_k} & \frac{1}{C_2 C_k} & \cdots & \frac{1}{C_k^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \\ b \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{b}{C_1} \left(1 + \frac{\sum \frac{1}{C_j}}{1 - \sum \frac{1}{C_j}} \right) \\ \frac{b}{C_2} \left(1 + \frac{\sum \frac{1}{C_i}}{1 - \sum \frac{1}{C_j}} \right) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \frac{b}{C_k} \left(1 + \frac{\sum \frac{1}{C_i}}{1 - \sum \frac{1}{C_j}} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{C_1} \left(\frac{1}{1 - \sum \frac{1}{C_j}} \right) \\ \frac{b}{C_2} \left(\frac{1}{1 - \sum \frac{1}{C_j}} \right) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \frac{b}{C_k} \left(\frac{1}{1 - \sum \frac{1}{C_j}} \right) \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots (A2.7)
 \end{aligned}$$

由式 (A2.7) 可寫出求取各 X_j 值的公式：

$$X_j = \frac{b}{C_j} \left(\frac{1}{1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{C_j}} \right) \quad j = 1, 2, \dots, k \quad \cdots \cdots \cdots (A2.8)$$

3. 未知值的計算程序

$$(1) \quad C = \sum \frac{1}{C_j} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_k} \right) \cdots \cdots \cdots (A3)$$

其中 C 值必須介於零與一之間 ($0 < C \leq 1$)，否則 b 必為負值。即是說如果 $C > 1$ ，採用式(2.8) 作全部事件投注者必招虧損。

$$(2) \quad D = 1 - C \cdots \cdots \cdots (A3.1)$$

$$(3) \quad E = \frac{1}{D} \cdots \cdots \cdots (A3.2)$$

$$(4) \quad X_j = \frac{b}{C_j} \cdot E ; \quad j=1,2,3, \cdots, k \cdots \cdots \cdots (A3.3)$$

附錄二：spss 迴歸分析輸入之數據及計算結果

事件	b	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
1	1000	6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	1000	-1	6.6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	1000	-1	-1	6.9	-1	-1	-1	-1	-1	-1
4	1000	-1	-1	-1	9	-1	-1	-1	-1	-1
5	1000	-1	-1	-1	-1	11	-1	-1	-1	-1
6	1000	-1	-1	-1	-1	-1	12	-1	-1	-1
7	1000	-1	-1	-1	-1	-1	-1	15	-1	-1
8	1000	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	20	-1
9	1000	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	21

SPSS output:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	1.000	1.000	1.000	.

a For regression through the origin (the no-intercept model), R Square measures the proportion of the variability in the dependent variable about the origin explained by regression. This CANNOT be compared to R Square for models which include an intercept.

b Predictors: X9, X8, X7, X6, X5, X4, X3, X2, X1

Coefficients

		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
Model		b	Std. Error	Beta		
	X1	779.994	.000	1.725	.	.
	X2	718.415	.000	1.720	.	.
	X3	691.134	.000	1.718	.	.
	X4	545.996	.000	1.717	.	.
	X5	454.996	.000	1.723	.	.
	X6	419.997	.000	1.726	.	.
	X7	341.247	.000	1.736	.	.
	X8	259.998	.000	1.751	.	.
	X9	248.180	.000	1.753	.	.

a Dependent Variable: b

b Linear Regression through the Origin

附錄三：2003 年 8 月 17 日規範化足球博彩各場之賠率

總入球 \ 賽事	1	2	3	4	5
0	8.5	10	9	13	9
1	4.4	4.5	4.4	4.5	4.3
2	3.2	3	3.2	3.2	3.2
3	3.5	3.5	3.5	3.7	3.6
4	5.3	5.3	5.3	4.5	5.2
5	8	8	8	7.5	8
6	18	18	17	13	18
7+	22	22	22	22	22
C 值	1.357823	1.355959	1.354555	1.359849	1.352265

資料來源：香港馬會足球博彩有限公司，2003 年 8 月 17 日
http://www.hkjcfootball.com/hk/chinese/odds/odds_ttg.asp

附錄四：2003 年 6 月 22 日，2003 年 1 月 1 日，及 2002 年 9 月 1 日各賽馬之現場賠率

2003 年 6 月 22 日各場賽馬之現場賠率：

場數 \ 馬匹	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4.5	10	21	5.3	4.1	13	5.6	27	7.2	7
2	23	2.4	6.4	10	10	30	99	3.1	8.8	11
3	4.5	9.9	14	24	10	32	3.7	5	17	21
4	19	22	4	19	13	5.7	4.4	28	4.1	5.4
5	28	9.2	16	17	64	7.1	15	94	27	50
6	9.6	71	8.4	40	4.8	2.9	63	5.5	7.1	4.5
7	8.4	99	4.9	20	14	13	11	99	59	43
8	6.5	30	14	2.3	7.6	10	14	12	5	8.9
9	44	45	50	14	36	33	56	24	99	6.8
10	8	23	12	73	18	10	9.8	99	41	54
11	19	29	14	11	7.8	78	55	12	9.6	99
12	16	32	45	25	31	45	13	6.2	10	12
13	26	9	21	44	30	50	36	37	42	70
14	99	6	29	21	99	13	16	39	70	8.6
C 值	1.265	1.239	1.261	1.238	1.235	1.242	1.236	1.23	1.227	1.234

資料來源：香港馬會
<http://www.hongkongjockeyclub.com/chinese/racing/Results.asp?RaceDate=22/06/2003&RaceNo=1>

2003 年 1 月 1 日各場賽馬之現場賠率：

場數 馬匹	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	6.7	19	2.4	7.1	4.1	1.7	8.2	3	3.3
2	6	6.1	31	6.2	18	4	5.1	5	21	5.3
3	4.5	6.3	2.9	8.2	2.3	20	12	4.1	7	5.2
4	22	4.9	5.3	33	20	14	14	99	6.3	3
5	7.9	23	8.9	99	11	14	11	63	14	99
6	45	9.1	34	48	8.4	10	98	15	13	25
7	88	50	75	21	99	5.8	20	13	77	27
8	10	99	4.2	77	67	65	99	48	21	52
9	7.5	99	99	12	7.7	32	99	37	30	99
10	32	3.3	13	10	7.7	19	19	2.8	7.2	17
11	19	99	35	7.5	99	26	99	71	13	74
12	22	99	20	27	19	23	39	28	20	69
13	97	31	52	23	---	11	30	30	36	99
14	18	99	25	64	---	---	99	---	81	99
C 值	1.223	1.235	1.236	1.235	1.239	1.231	1.242	1.223	1.231	1.241

資料來源：香港馬會

<http://www.hongkongjockeyclub.com/chinese/racing/Results.asp?RaceDate=01/01/2003&RaceNo=1>

2002 年 9 月 1 日各場賽馬之現場賠率：

場數 馬匹	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3.7	3.8	2.1	3.7	13	10	28	2.6	11
2	18	23	4.5	4.4	4.8	51	1.5	11	15
3	7.4	13	99	6.6	28	2.2	20	5.2	2.8
4	25	4	38	10	17	11	6.8	5.5	63
5	8.5	32	94	11	2.4	12	21	65	17
6	17	5.5	81	16	4	18	30	50	26
7	11	65	8.7	9.7	74	26	14	14	10
8	4.8	8.8	16	99	11	10	9.3	11	5.2
9	13	10	13	29	16	52	18	13	15
10	27	29	13	19	99	7.9	99	24	18
11	22	10	67	9.5	99	63	79	51	96
12	18	99	22	99	99	60	94	74	28
13	67	99	33	50	99	10	---	62	8.1
14	67	88	20	99	99	48	---	71	81
C 值	1.221	1.242	1.23	1.248	1.254	1.242	1.248	1.215	1.224

資料來源：香港馬會

<http://www.hongkongjockeyclub.com/chinese/racing/Results.asp?RaceDate=01/09/2002&RaceNo=1>

參考文獻：

1. 林公豫，〈多個事件博弈問題的理論和應用〉，Working Paper Series, Economics Department, Hong Kong Shue Yan college, May 2003. (Revised version, September 2003)
2. A.S..Householder, The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell, New York, 1964.
3. A. C. Atkinson, Plots, Transformations, and Regression, Oxford University Press, 1988.
4. E.J. Borowski & J.M. Borwein, Harper Collins Dictionary of Mathematics, 中譯版，貓頭鷹出版社，1999。

The working paper series is a series of occasional papers funded by the Research and Staff Development Committee. The objective of the series is to arouse intellectual curiosity and encourage research activities. The expected readership will include colleagues within Hong Kong Shue Yan College, as well as academics and professionals in Hong Kong and beyond.

Important Note

All opinions, information and/or statements made in the papers are exclusively those of the authors. Hong Kong Shue Yan College and its officers, employees and agents are not responsible, in whatsoever manner and capacity, for any loss and/or damage suffered by any reader or readers of these papers.